25　図形と式の種々の問題

212

円 C' の中心を $(a,\ b)$ とすると，その方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=1$　・・・①

2 円の中心座標すなわち $(1,\ 1)$ と $(a,\ b)$ は $y=\dfrac{x}{2}$ に関して対称な位置関係にあるから，

これら 2 点の中点 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)$ は $y=\dfrac{x}{2}$ を満たす。

よって，$\dfrac{b+1}{2}=\dfrac{a+1}{4}$ より，$a-2b=1$　・・・②

また，これら 2 点を通る直線は $y=\dfrac{x}{2}$ と直交することから，

それぞれの方向ベクトルの内積は 0 である。

よって，$\begin{pmatrix} a-1 \\ b-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0$ より，$2(a-1)+b-1=0$　すなわち $2a+b=3$　・・・③

②と③の連立方程式を解くことにより，$(a,\ b)=\left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

これを①に代入することにより，円 C' の方程式は $\left(x-\dfrac{7}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{5}\right)^2=1$

213

(1)

二等辺三角形の性質より，線分 AB の垂直二等分線は点 P を通る。

また，線分 AB の垂直二等分線は点 P を通るならば，△PAB は PA＝PB である二等辺三角形である。したがって，線分 AB の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となるような点 P の座標を求めればよい。

そこで，$\mathrm{P}(t,\ t^2-8t+15)$ とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{-2+0}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)=(-1,\ 2)$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\begin{pmatrix} -1-t \\ 2-t^2+8t-15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -t-1 \\ -t^2+8t-13 \end{pmatrix}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} -t-1 \\ -t^2+8t-13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}=2(-t-1)-2(-t^2+8t-13)=2(t^2-9t+12)$ より，

$t^2-9t+12=0$

したがって，解の公式により，点 P の x 座標 t は $t=\dfrac{9\pm\sqrt{33}}{2}$ となるが，

$\dfrac{9-\sqrt{33}}{2}-1=\dfrac{7-\sqrt{33}}{2}>0$，$7-\dfrac{9+\sqrt{33}}{2}=\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}<0$ より，

点 P の x 座標の条件すなわち $1\leq x\leq 7$ を満たすのは $t=\dfrac{9-\sqrt{33}}{2}$ だけである。

ゆえに，$\mathrm{P}\left(t,\ t^2-8t+15\right)=\left(t,\ (t-4)^2-1\right)=\left(\dfrac{9-\sqrt{33}}{2},\ \dfrac{15-\sqrt{33}}{2}\right)$

(2)

△PAB の辺 AB を底辺とすると，点 P から直線 AB に下ろした垂線の長さが高さである。
これと，辺 AB の長さが一定であることから，高さが最小のとき△PAB の面積も最小となる。
直線 AB は傾きが -1 で y 切片が 1 だから，その方程式は $y=-x+1$ すなわち $x+y-1=0$
よって，$\mathrm{P}\left(u,\ u^2-8u+15\right)$ とすると，

△PAB の高さは $\dfrac{\left|u+u^2-8u+15-1\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{\left|u^2-7u+14\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left|\left(u-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left(u-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}{\sqrt{5}}$

これと，$1\leq u\leq 7$ より，$u=\dfrac{7}{2}$ のとき高さが最小となる。

ゆえに，$\mathrm{P}\left(u,\ u^2-8u+15\right)=\left(u,\ (u-4)^2-1\right)=\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

214

解法 1

点 A と $x+y=2$ に関して対称な点を A' とすると，
$x+y=2$ は線分 AA' の垂直二等分線である。
よって，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}\geq \mathrm{A'Q}$
したがって，3 点 A', P, Q が同一直線上に並ぶとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ は最小値 A'Q をとる。
さらに，A'Q が最小値をとるのは，点 Q が直線 A'O と円 $x^2+y^2=1$ の交点となるときで，
このとき，$\mathrm{A'Q}=\mathrm{A'O}-1$ となる。
よって，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ の最小値は $\mathrm{A'O}-1$　・・・①

そこで，$\mathrm{A'}(a,\ b)$ とすると，$x+y=2$ は線分 AA' の中点 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ を通るから，

$\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{b}{2}=2\quad \therefore a+b=3$　・・・②

$x+y=2$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=\begin{pmatrix}a-1\\b\end{pmatrix}$ の内積が 0 だから，$-a+1+b=0$ より，

$a-b=1$　・・・③
②，③の連立方程式を解くことにより，$\mathrm{A'}(a,\ b)=(2,\ 1)$

これと①より，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ の最小値は $\sqrt{2^2+1^2}-1=\sqrt{5}-1$

また，直線 A'O の方程式は $y=\dfrac{x}{2}$ だから，

点 P の座標は連立方程式 $\begin{cases} y=\dfrac{x}{2} \\ x+y=2 \end{cases}$ の解，すなわち $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

点 Q の座標は連立方程式 $\begin{cases} y=\dfrac{x}{2} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ の解のうち，$0<x<2$ を満たすもの，

すなわち $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

以上をまとめると，

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ は最小値 $\sqrt{5}-1$ をとる。

解法 2

点 A と $x+y=2$ に関して対称な点を A' とすると，

$x+y=2$ は線分 AA' の垂直二等分線である。

よって，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}\geq \mathrm{A'Q}$

したがって，3 点 A', P, Q が同一直線上に並ぶとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ は最小値 A'Q をとる。

そこで，$\mathrm{A'}(a,\ b)$ とすると，$x+y=2$ は線分 AA' の中点 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ を通るから，

$\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{b}{2}=2 \quad \therefore a+b=3$ 　・・・②

$x+y=2$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$ の内積が 0 だから，$-a+1+b=0$ より，

$a-b=1$ 　・・・③

②，③の連立方程式を解くことにより，$\mathrm{A'}(a,\ b)=(2,\ 1)$ 　・・・④

点 Q の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{A'Q}&=\sqrt{(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta-1)^2}\\&=\sqrt{6-2(\sin\theta+2\cos\theta)}\\&=\sqrt{6-2\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)}\end{aligned}$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，A'Q は $\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき最小値 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$ をとる。

また，$\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha=\dfrac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sqrt{5}}=1$ より，$\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{5}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{5}-2\cos\theta$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入し，整理すると，$\left(\sqrt{5}\cos\theta-2\right)^2=0$　$\therefore \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$　・・・⑤

④と⑤より，A' と Q は $y=2x$ 上の点である。
したがって，P も $y=2x$ 上の点である。

よって，点 P の座標は連立方程式 $\begin{cases} y=\dfrac{x}{2} \\ x+y=2 \end{cases}$ の解，すなわち $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

以上をまとめると，

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ は最小値 $\sqrt{5}-1$ をとる。

215

解法 1

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leq\theta<2\pi)$ とおくと，点 P は $x^2+y^2=1$ を満たす。
また，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2&=\left\{(3-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right\}+\left\{\cos^2\theta+(2-\sin\theta)^2\right\}\\&=15-2(2\sin\theta+3\cos\theta)\\&=15-2\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

よって，$\sin(\theta+\alpha)=-1$ すなわち $\theta+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ は最大値 $15+2\sqrt{13}$ をとる。

また，このときの点 P の x 座標　すなわち $\cos\theta$ の値は

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\cos\frac{3}{2}\pi\cos\alpha+\sin\frac{3}{2}\pi\sin\alpha=-\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

以上をまとめると，

$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ の最大値は $15+2\sqrt{13}$ で，このときの点 P の x 座標は $-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

解法 2

$\mathrm{P}(x,\ y)$（$x^2+y^2=1$）とおくと，

$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=\{(3-x)^2+y^2\}+\{x^2+(2-y)^2\}$

$=15-4x-6y$

ここで，$15-4x-6y=k$ とおくと，$4x+6y+k-15=0$

この直線と円 $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ の距離を d とすると，$d=\dfrac{|k-15|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\dfrac{|k-15|}{2\sqrt{13}}$

$4x+6y+k-15=0$ は点 P を通るから，$d\leq 1$ より，$\dfrac{|k-15|}{2\sqrt{13}}\leq 1$

よって，$|k-15|\leq 2\sqrt{13}$ より，$-2\sqrt{13}\leq k-15\leq 2\sqrt{13}$　$\therefore 15-2\sqrt{13}\leq k\leq 15+2\sqrt{13}$

これより，$15-4x-6y$ すなわち $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ の最大値は $15+2\sqrt{13}$

また，このとき $15-4x-6y=15+2\sqrt{13}$ より，$y=-\dfrac{2x+\sqrt{13}}{3}$

これと $x^2+y^2=1$ より，$x^2+\left(-\dfrac{2x+\sqrt{13}}{3}\right)^2=1$

両辺に 9 を掛け x について整理すると，$13x^2+4\sqrt{13}x+4=0$ より，$\left(\sqrt{13}x+2\right)^2=0$

$\therefore x=-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

以上より，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ の最大値は $15+2\sqrt{13}$ で，このときの点 P の x 座標は $-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

216

解法 1

AC と CD の傾きは大きさは等しく，符号が逆であることと，

AC の傾きが $-\frac{1}{t}$ であることから，DC の傾きは $\frac{1}{t}$ である。

よって，直線 CD は点 $\mathrm{C}(t,\ 0)$ を通り，傾き $\frac{1}{t}$ の直線であることから，

その方程式は $y=\frac{1}{t}x-1$　・・・①

また，直線 AB の方程式は $x+y=1$　・・・②

点 D は①と②の交点だから，①と②の連立方程式を解くことにより，$\mathrm{D}\left(\frac{2t}{1+t},\ \frac{1-t}{1+t}\right)$

よって，

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathrm{ACD}&=\Delta\mathrm{ABO}-\Delta\mathrm{ACO}-\Delta\mathrm{BCD}\\
&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot t\cdot1-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-t}{1+t}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-t-\frac{t^2-2t+1}{t+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left\{1-t-\left(t-3+\frac{4}{t+1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(-2t+4-\frac{4}{t+1}\right)\\
&=-t+2-\frac{2}{t+1}\\
&=3-(t+1)-\frac{2}{t+1}\\
&=3-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$t>0$ より，$t+1>0,\ \frac{2}{t+1}$ だから，相加平均≥相乗平均より，

$$t+1+\frac{2}{t+1}\geq2\sqrt{(t+1)\frac{2}{t+1}}=2\sqrt{2}\qquad\therefore-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)\leq-2\sqrt{2}$$

等号成立は，$t+1=\frac{2}{t+1}$ （$t>0$）を解くことにより，$t=-1+\sqrt{2}$ となり，

これは与えられた t の範囲すなわち $0<t<1$ を満たす。

よって，$\Delta\mathrm{ACD}=3-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)\leq3-2\sqrt{2}$ （等号成立は $t=-1+\sqrt{2}$ のとき）

ゆえに，△ACD の面積の最大値は$3-2\sqrt{2}$

解法 2

AC と CD の傾きは大きさは等しく，符号が逆であることと，

AC の傾きが$-\dfrac{1}{t}$であることから，DC の傾きは$\dfrac{1}{t}$である。

よって，直線 CD は点$\mathrm{C}(t,\ 0)$を通り，傾き$\dfrac{1}{t}$の直線であることから，

その方程式は$y=\dfrac{1}{t}x-1$　・・・①

また，直線 AB の方程式は$x+y=1$　・・・②

点 D は①と②の交点だから，①と②の連立方程式を解くことにより，$\mathrm{D}\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)$

よって，

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{ACD}&=\Delta\mathrm{ABO}-\Delta\mathrm{ACO}-\Delta\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot t\cdot1-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-t}{1+t}\\&=\frac{-t^2+t}{t+1}\end{aligned}$$

$\dfrac{-t^2+t}{t+1}=k$ とおき，両辺に$t+1$を掛けtについて整理すると，$t^2+(k-1)t+k=0$

これは，$f(t)=t^2+(k-1)t+k=\left(t+\dfrac{k-1}{2}\right)^2-\dfrac{k^2-6k+1}{4}$ とおくと，

$0<t<1$において，$f(t)=0$となるようなtが少なくとも 1 つ存在することと同値である。

(i) $f(t)=0$（$0<t<1$）となるtが 1 つだけ存在するとき

　$f(0)f(1)<0$を満たせばよい。

　ところが，$f(0)f(1)=k^2\geq0$となり，不適

(ii) $f(t)=0$（$0<t<1$）となるtが重解を含め 2 つ存在するとき

　軸$t=-\dfrac{k-1}{2}$が満たすべき条件

　　$0<-\dfrac{k-1}{2}<1$より，$-1<k<1$　・・・③

　$f\left(-\dfrac{k-1}{2}\right)=-\dfrac{k^2-6k+1}{4}$が満たすべき条件

　　$f\left(-\dfrac{k-1}{2}\right)=-\dfrac{k^2-6k+1}{4}\leq0$より，$k^2-6k+1\geq0$

　　$\therefore k\leq3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}\leq k$　・・・④

$f(0)=k$ および $f(1)=k$ が満たすべき条件

$f(0)>0$ かつ $f(1)>0$ より，$k>0$ ・・・⑤

③かつ④かつ⑤より，$0<k\leq 3-2\sqrt{2}$

ゆえに，△ACD の面積の最大値は $3-2\sqrt{2}$

解法 3

AC と CD の傾きは大きさは等しく，符号が逆であることと，

AC の傾きが $-\dfrac{1}{t}$ であることから，DC の傾きは $\dfrac{1}{t}$ である。

よって，直線 CD は点 $\mathrm{C}(t,\ 0)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{t}$ の直線であることから，

その方程式は $y=\dfrac{1}{t}x-1$ ・・・①

また，直線 AB の方程式は $x+y=1$ ・・・②

点 D は①と②の交点だから，①と②の連立方程式を解くことにより，$\mathrm{D}\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)$

よって，

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{ACD}&=\Delta\mathrm{ABO}-\Delta\mathrm{ACO}-\Delta\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot t\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-t}{1+t}\\&=\frac{-t^2+t}{t+1}\\&=-t+2-\frac{2}{t+1}\end{aligned}$$

ここで，$f(t)=-t+2-\dfrac{2}{t+1}\ (0<t<1)$ とおくと，

$f'(t)=-1+\dfrac{2}{(t+1)^2}=\dfrac{-(t+1)^2+2}{(t+1)^2}=\dfrac{\left(-t-1+\sqrt{2}\right)\left(t+1+\sqrt{2}\right)}{(t+1)^2}$ より，

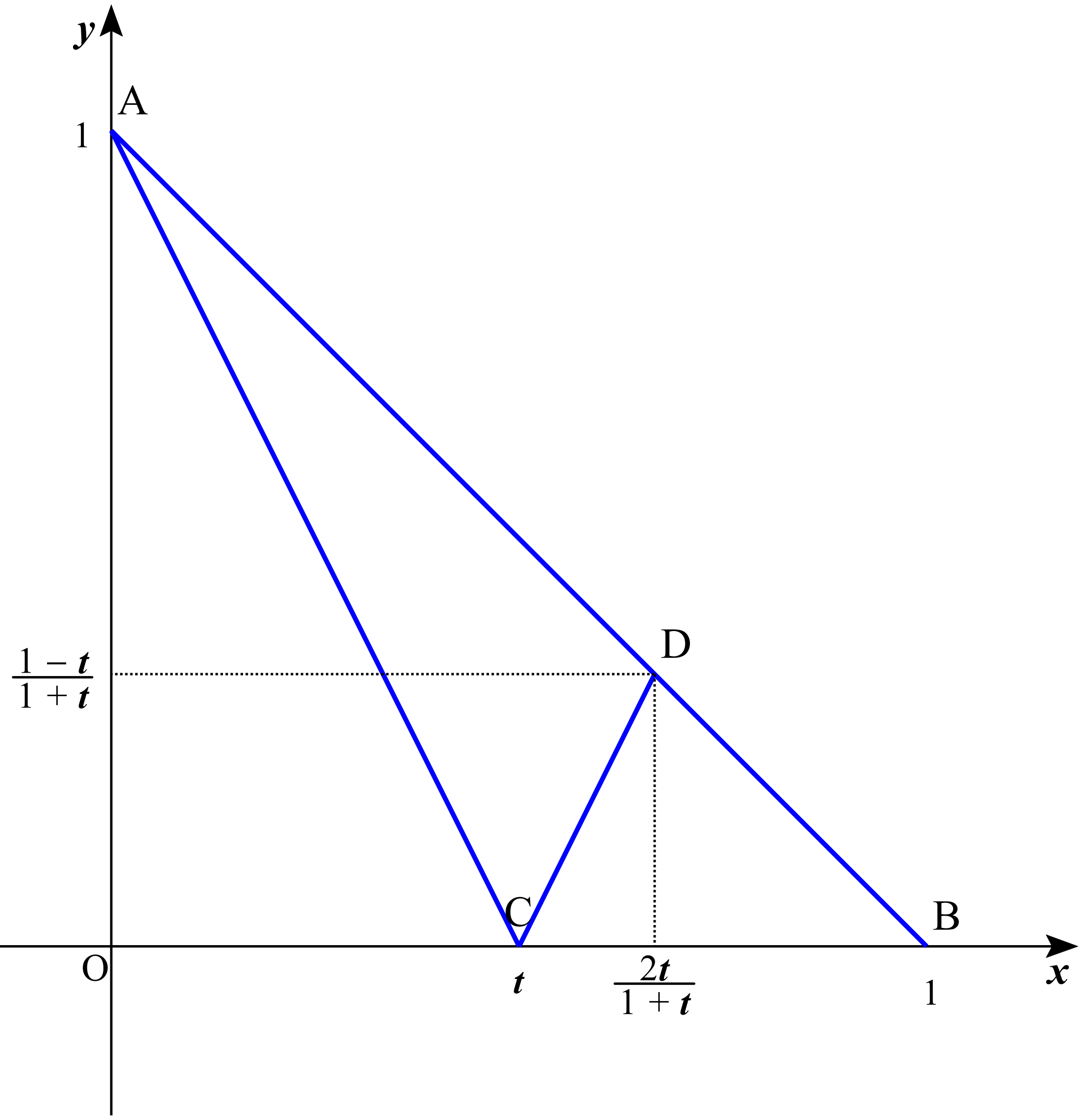
$f(t)=-t+2-\dfrac{2}{t+1}\ (0<t<1)$ の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(t)$	/	+	0	−	/
$f(t)$	/	↑	極大	↓	/

よって，$f(t)$ の最大値は $f\left(\sqrt{2}-1\right)=-\sqrt{2}+3-\dfrac{2}{\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$

ゆえに，△ACD の面積の最大値は $3-2\sqrt{2}$

参考図



217

直線 AB の方程式は，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ より，$y=-\dfrac{2}{3}x+2$

よって，点 P の座標は$\left(t,\ -\dfrac{2}{3}t+2\right)$ （$0\leq t<3$）

これより $\mathrm{H}(t,\ 0)$ だから，点 M の座標は$\left(\dfrac{t+3}{2},\ 0\right)$

したがって，与えられた条件の円の面積を S とすると，
$\mathrm{OM}^2\leq\mathrm{OP}^2$ のとき $S=\pi\mathrm{OP}^2$，$\mathrm{OM}^2\geq\mathrm{OP}^2$ のとき $S=\pi\mathrm{OM}^2$
ここで，

$$\mathrm{OP}^2-\mathrm{OM}^2=\left\{t^2+\left(-\frac{2}{3}t+2\right)^2\right\}-\left(\frac{t+3}{2}\right)^2$$
$$=\frac{43t^2-150t+63}{36}$$
$$=\frac{(t-3)(43t-21)}{13}$$

ただし，$0\leq t<3$
よって，

$\mathrm{OM}^2\leq\mathrm{OP}^2$ すなわち $0\leq t\leq\dfrac{21}{43}$ のとき

$$S=\pi\mathrm{OP}^2=\pi\left\{t^2+\left(-\frac{2}{3}t+2\right)^2\right\}=\pi\left(\frac{13}{9}t^2-\frac{24}{9}t+4\right)=\pi\left\{\frac{13}{9}\left(t-\frac{12}{13}\right)^2+\frac{36}{13}\right\}$$

これと $0\leq t\leq\dfrac{21}{43}<\dfrac{12}{13}$ より，$t=\dfrac{21}{43}$ のとき S は最小となる。

$\mathrm{OM}^2\geq\mathrm{OP}^2$ すなわち $\dfrac{21}{43}\leq t<3$ のとき

$$S=\pi\mathrm{OM}^2=\pi\left(\frac{t+3}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(t+3)^2$$

よって，$t=\dfrac{21}{43}$ のとき S は最小となる。

以上より，$t=\dfrac{21}{43}$ のとき S は最小となる。

よって，点 P の座標は$\left(t,\ -\dfrac{2}{3}t+2\right)=\left(\dfrac{21}{43},\ -\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{21}{43}+2\right)=\left(\dfrac{21}{43},\ \dfrac{72}{43}\right)$

218

(1)

AB の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b}{2} \end{pmatrix}$ ・・・①

条件より，△ABC は正三角形だから，

$\mathrm{MC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ 　すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ ・・・②

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 0$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ のうち，大きさが 1 であるものを $\vec{p}$ とすると，$\vec{p} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

よって，$\vec{p} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ が与えられた条件をみたすとき

①，②より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b}{2} \end{pmatrix} + \left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right| \cdot \vec{p} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b}{2} \end{pmatrix} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2} \\ \dfrac{b+\sqrt{3}a}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab$

これと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = 1$ より，$a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab = 1$ 　$\therefore s + \sqrt{3}t = 1$

$\vec{p} = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ が与えられた条件をみたすときも同様にして，$s - \sqrt{3}t = 1$

よって，$s \pm \sqrt{3}t = 1$

あるいは，$(s-1)^2 = 3t^2$

(2)

△ABC は正三角形だから，その面積は $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}s$ ・・・③

a^2 と b^2 は $x^2-\left(a^2+b^2\right)x+a^2b^2=0$ すなわち $x^2-sx+t^2=0$ の負でない 2 実数解である。

したがって，

判別式を D とすると， $D \geq 0$

これと $D=s^2-4t^2$ より， $s^2-4t^2 \geq 0$ $\quad \therefore 4t^2-s^2 \leq 0$ ・・・④

(1)より， $(s-1)^2=3t^2$ $\quad \therefore t^2=\frac{(s-1)^2}{3}$ ・・・⑤

⑤を④に代入し整理すると， $\frac{s^2-8s+4}{3} \leq 0$ より， $s^2-8s+4 \leq 0$

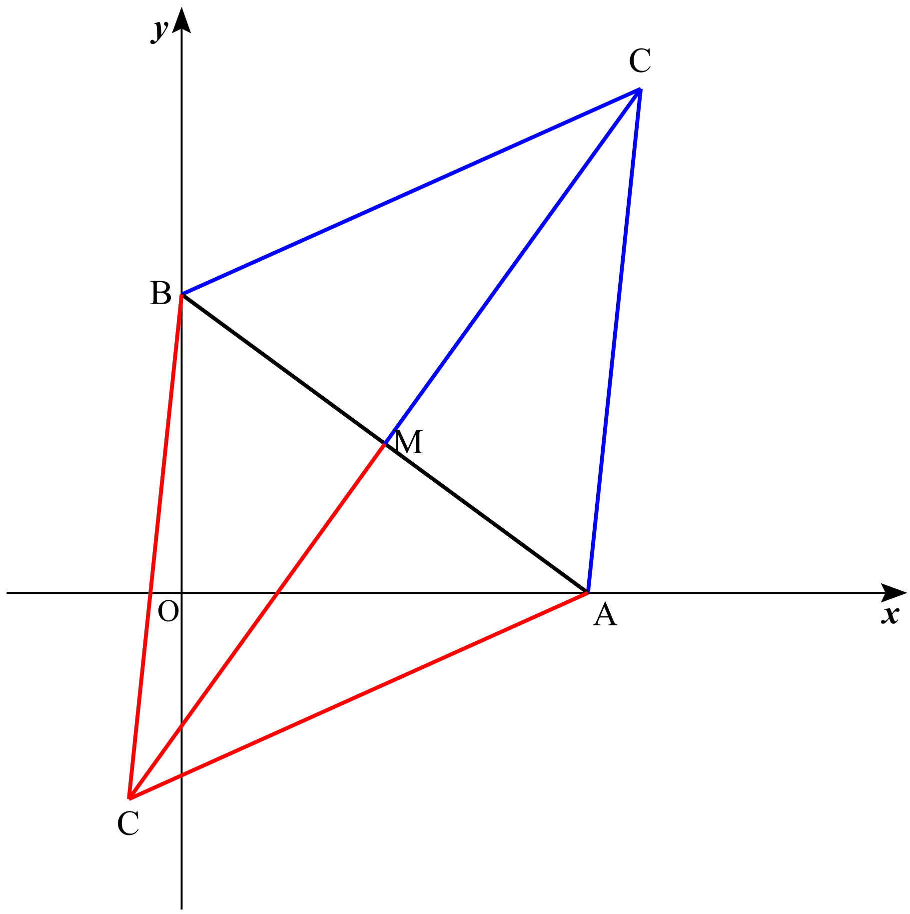
$\therefore 4-2\sqrt{3} \leq s \leq 4+2\sqrt{3}$ ・・・⑥

また，解が負でないことは， $s=a^2+b^2 \geq 0$， $t^2 \geq 0$ により保証される。

よって，⑥を③に代入することにより，△ABC の面積のとりうる値の範囲を求めると，

$\frac{2\sqrt{3}-3}{2} \leq \Delta ABC \leq \frac{2\sqrt{3}+3}{2}$

参考図



219

3 つの頂点すべてが有理点である正三角形 ABC が存在すると仮定し，

$\mathrm{A}(p,\ q)$，$\mathrm{B}(r,\ s)$，$\mathrm{C}(t,\ u)$（$p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u$ は有理数）とする。

すると，△ABC の面積$=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left\{(r-p)^2+(s-q)^2\right\}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} r-p \\ s-q \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} t-p \\ u-q \end{pmatrix}$ より，△ABC の面積$=\dfrac{1}{2}\left|(r-p)(u-q)-(s-q)(t-p)\right|$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left\{(r-p)^2+(s-q)^2\right\}=\dfrac{1}{2}\left|(r-p)(u-q)-(s-q)(t-p)\right|$ より，

$$\sqrt{3}=\frac{2\left|(r-p)(u-q)-(s-q)(t-p)\right|}{(r-p)^2+(s-q)^2}$$

したがって，右辺は有理数だから，$\sqrt{3}$ は有理数である。

これは $\sqrt{3}$ が無理数であることと矛盾する。

よって，3 つの頂点すべてが有理点である正三角形は存在しない。

220

傾き $\dfrac{2}{5}$ の任意の直線の方程式は $2x-5y-k=0$（k は任意の実数）と表せるから，

それと格子点 $(m,\ n)$ の距離を d とすると，$d=\dfrac{|2m-5n-k|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\dfrac{|2m-5n-k|}{\sqrt{29}}$　・・・①

ここで，$(m,\ n)=(3,\ 1)$ のとき $2\cdot 3-5\cdot 1=1$ より，i を任意の整数とすると，

$(m,\ n)=(3i,\ i)$ のとき $2m-5n=2\cdot 3i-5\cdot i=i$ となる。

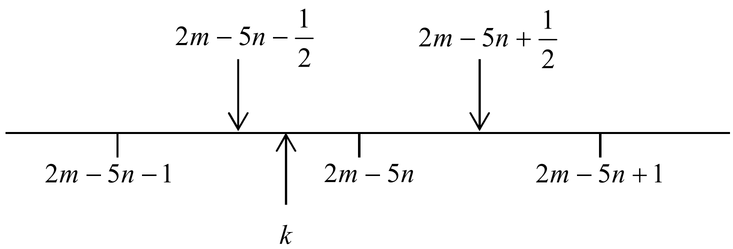
したがって，$2m-5n$ は任意の整数値をとることができる。

よって，$2m-5n$ が k に最も近い値をとるとき，$|2m-5n-k|\leqq\dfrac{1}{2}$　・・・②　となる。

なぜならば，$\dfrac{1}{2}<|2m-5n-k|\leqq 1$ とすると，

$2m-5n-1$ または $2mn-5n+1$ が k に最も近い値をとるからである。

参考図



よって，任意の直線 $2x-5y-k=0$ とそれに最も近い格子点の距離の範囲は

①と②より，$0 \leq d \leq \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{29}} = \dfrac{1}{2\sqrt{29}}$

したがって, 格子点を中心とする円の半径 r が満たすべき条件は，$0 \leq d \leq \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{29}} = \dfrac{1}{2\sqrt{29}} \leq r$

よって，r の最小値は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$